Если $\Phi(z)$ *— комплекснозначная функция, аналитическая на открытом множестве, содержащем множество значений* f, *то* $\Phi(f) \in A^p_\alpha$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p \leqslant 1$, *последовательность* α *удовлетворяет условиям* $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n \geqslant 1$, $\alpha_n \alpha_i^{-1} \alpha_{n \ominus i} \leqslant C$ *при* $n, i \in \mathbb{Z}_+$ *и* $f \in A^p_\alpha$. *Если* $\Phi(z)$ *— аналитическая функция на открытом множестве* U, *содержащем множество значений* f, *то* $\Phi(f) \in A^p_\alpha$.

При $p = 1$, $\alpha_n \equiv 1$ и $p_i \equiv 2$ теорема 2 была установлена Г. Н. Агаевым [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента "Ведущие научные школы РФ" (проект НШ-2970.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах.* – Баку: Элм, 1981.

2. Агаев Г. Н. *Теорема типа Винера для рядов по функциям Уолша* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 142. – № 4. – С. 751–753.

И. Ю. Выгодчикова

Саратов, VigodchikovaIY@info.sgu.ru

О ЗАДАЧЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ТИПА РАВЕНСТВА

Пусть n, N — целые числа, $n \geqslant 0$, $N \geqslant n+1$, $T = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_N\}$, $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$. На сетке T задана сегментная функция $\Phi(\cdot)$, $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \geqslant y_{1,k}$, $k = \overline{0,N}$. Обозначим $f_1(A,t_k) = p_n(A,t_k) - y_{1,k}$, $f_2(A,t_k) = y_{2,k} - p_n(A,t_k)$, $f(A,t_k) = \max\{f_1(A,t_k), f_2(A,t_k)\}$. Рассмотрим задачу:

$$\rho(A) := \max_{k=\overline{0,N}} f(A,t_k) \longrightarrow \min_{A\in D=\{A\in\mathbb{R}^{n+1}: p_n(A,t_s)=\nu\}}, \qquad (1)$$

где $t_s \in T$, $\nu \in R$. Обозначим

$$\rho^* = \min_{A\in R^{n+1}} \rho(A), \quad \Re = \left\{A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\right\},$$

$$\rho^{**} = \min_{A\in D} \rho(A), \quad \Re(\nu) = \{A \in D : \rho(A) = \rho^{**}\}.$$

Из [1] вытекает, что задача (1) имеет решение и справедлива

Теорема. *Пусть $\Re \cap D = \emptyset$. Вектор $A^* \in R^{n+1}$ принадлежит множеству $\Re(\nu)$ тогда и только тогда, когда $p_n(A^*,t_s) = \nu$ и выполняется хотя бы одно из условий:*

(I) $\rho(A^*) = \theta$, *где* $\theta = \max\{y_{2,s} - \nu, \nu - y_{1,s}\}$;

(II) $\exists$ $n+1$ *точек* $\Delta := \{t_{q_0} < \cdots < t_{q_n}\} \subset T \setminus \{t_s\}$, *таких, что при* $s = 2$ *или* $s = 1$ *имеем:* $\rho(A^*) = f_s(A^*,t_{q_k})$, *если* $z(t_{q_k})$ *— четно,* $\rho(A^*) = f_{3-s}(A^*,t_{q_k})$, *если* $z(t_{q_k})$ *— нечетно, для* $k = \overline{0,n}$, *где через* $z(t_{q_k})$ *обозначено количество точек множества* Δ, *расположенных на интервале* (t_s, t_{q_k}) *при* $t_s < t_{q_k}$ *или* (t_{q_k}, t_s) *при* $t_s > t_{q_k}$.

Критерий единственности решения задачи (1) и критерий распознавания крайних точек дословно повторяют соответствующие результаты из [2]. Несложно показать, что множество крайних точек $E(\Re(\nu))$ для множества решений задачи (1) конечно. Пусть, далее, $y_k = y_{2,k} = y_{1,k}$, $k = \overline{0,N}$. Обозначим $\bar{t} = (t_0 + \cdots + t_N)/(N+1)$, $\bar{y} = (y_0 + \cdots + y_N)/(N+1)$. Считаем, что $\bar{t} \in T$. Положим $t_s = \bar{t}$, $\nu = \bar{y}$, то есть полиномиальная оценка $\hat{y}_k(A^*) = p_n(A^*,t_k)$, $k = \overline{0,N}$, исходной выборки $\{y_k\}$ должна в среднем узле сетки принимать среднее значение аппроксимируемых величин. Пусть $\Re(\nu)$ содержит бесконечно много элементов. Введем в рассмотрение вспомогательное множество G, изначально положив $G = E(\Re(\nu))$. Во множестве $\Re(\nu)$ иногда можно выделить один элемент, следуя такой процедуре.

Шаг 1. Обозначим через

$$TM = \{t_m \in T : \exists A_1,\ A_2 \in G,\ p_n(A_1, t_m) < y_m < p_n(A_2, t_m)\}.$$

Если $TM = \emptyset$, то процедура заканчивается.

Шаг 2. Полагаем $A_\alpha = \alpha A_1 + (1-\alpha) A_2$ и решаем относительно α задачу

$$Z(\alpha) := \sum_{t_i \in TM} (y_i - p_n(A_\alpha, t_i))^2 \to \min_\alpha .$$

Ясно, что $\alpha \in (0,1)$. Полагаем $G = G \cup A_\alpha \setminus \{A_1, A_2\}$ и возвращаемся к шагу 1. На последнем шаге получаем нужную оценку $\hat{y}_k(A_\alpha) = p_n(A_\alpha, t_k)$, $k = \overline{0, N}$. Результат отличается от применения классического метода наименьших квадратов к исходным данным.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-2970.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Выгодчикова И. Ю. Об условной задаче наилучшего приближения сегментной функции алгебраическим полиномом // Матем. Мех.: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. – Вып. 10.

2. Выгодчикова И. Ю. О задаче наилучшего приближения сегментной функции алгебраическим полиномом с ограничением // Тез. докл. Воронежск. зимн. матем. школы "Совр. методы теории функций и смежн. проблемы". – Воронеж, 2009. – С. 39–40.

Н. С. Габбасов, Р. Р. Замалиев

Набережные Челны, Казань, zamrr@yandex.ru

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА С ФИКСИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРЕ

Рассматривается линейное интегральное уравнение третьего рода с фиксированными особенностями в ядре (УТРФО)

$$Ax \equiv x(t)\prod_{j=1}^{l}(t-t_j)^{m_j}+ \\ +\int_{-1}^{1} K(t,s)\left[(s+1)^{p_1}(1-s)^{p_2}\right]^{-1} x(s)ds = y(t), \quad (1)$$

где $t \in I \equiv [-1,1]$, $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ $(j=\overline{1,l})$; p_1, $p_2 \in \mathbb{R}^+$ $+$, K и y — известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами "гладкости" точечного характера, x — искомая функция, а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. Исследуемые уравнения находят все более широкие применения как в теории, так и в приложениях. При этом естественными классами решений УТР, как правило, являются специальные пространства обобщенных функций. УТРФО вида (1) впервые исследовано в работе [1], где установлена его фредгольмовость.